数理解析研究所講究録 1243 巻 2002 年 22-29

KOROVKIN TYPE APPROXIMATION THEOREMS ON THE DISK ALGEBRA

新潟大学大学院　自然科学研究科　春日一浩　(Kazuhiro Kasuga)

Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1. 円板環上の BKW-作用素

Γ を複素平面の単位円周とする。$A(\Gamma)$ を Γ 上の複素数値連続関数で開円板 $D=\{|z|<1\}$ へ正則に拡張される関数の全体とする。$A(\Gamma)$ を円板環という。

高橋 ([4]) は、Korovkin 近似定理を一般化するため Bohman-Korovkin-Wulbert 作用素 (簡単に BKW-作用素 という) の概念を導入した。

定義 X を separable complex Banach space とし S を X の部分集合とする。X 上の有界線形作用素 T が test functions S についての BKW-作用素と呼ばれるのは次が成り立つ時に言う。$\{T_n\}_n$ を次の (i) (ii) を満たす X 上の有界線形作用素の列とする。

(i) すべての n に対して $\|T_n\| \leq \|T\|$。

(ii) すべての $h \in S$ に対して $\|T_n h - Th\| \to 0$ $(n \to \infty)$。

この時すべての $f \in X$ に対して $\|T_n f - Tf\| \to 0$ $(n \to \infty)$。

我々は円板環上の BKW-作用素 について考察する。$S_n = \{1, z, z^2 \ldots, z^n\}$ とおく。この時次が成り立つ。

定理 1 ([2]) T を $A(\Gamma)$ 上の有界作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ とする。この時 T が test functions S_n についての BKW-作用素であるための必要十分条件は T が次のように表せることである。すなわち

$$(Tf)(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\zeta)(C_{\varphi_j} f)(\zeta) \quad (\zeta \in \Gamma,\ f \in A(\Gamma)),$$

ここで Γ 上 $|\varphi_j| = 1$, すべての j に対して $a_j(\zeta) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} a_j(\zeta) = 1$ $(\zeta \in \Gamma)$。

さて $\{z_j\}_{j=1}^{n} \subset D$ に対して

$$b(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{-\bar{z}_j}{|z_j|} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}, \quad z \in \bar{D}$$

とする。ここで λ は $|\lambda| = 1$ を満たす定数である。こういうタイプの関数 $b(z)$ を finite Blaschke products という。Γ 上で $|b| = 1$ である。また絶対値 1 の定数関数も finite Blaschke product という。

2. {1,z} についての 円板環上の BKW-作用素

$S_1 = \{1, z\}$ についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素について考える。次の定理が成り立つ。

定理 2 ([3]) T が $\|T\| = 1$ を満たす $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素とする。この時 T が $\{1, z\}$ についての BKW-作用素であるための必要十分条件は $T = \psi C_\varphi$ と表せることである。ここで ψ, φ は finite Blaschke products である。

3. $\{1, z, z^2\}$ についての 円板環上の BKW-作用素

T を test functions $S_2 = \{1, z, z^2\}$ についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ を満たすものとする。定理 1 より T は次のように表せる。

$$(Tf)(\zeta) = a(\zeta)(C_\varphi f)(\zeta) + b(\zeta)(C_\psi f)(\zeta) \quad (\zeta \in \Gamma,\ f \in A(\Gamma)),$$

ここで

$$|\varphi(\zeta)| = |\psi(\zeta)| = 1,\ a(\zeta) + b(\zeta) = 1,\ a(\zeta),\ b(\zeta) \geq 0 \quad (\zeta \in \Gamma)。$$

注意 a, b, φ, ψ は Γ 上で連続とは限らない。([3] 参照)。

特に次の形を持つ BKW-作用素を考える。

(#) $T = (C_\varphi + C_\psi)/2$, Γ 上で $|\varphi| = 1$ かつ $|\psi| = 1$。

この場合、$T1 = 1$ かつ $\|T\| = 1$。

次の補題は BKW-作用素の定義から導かれる。

補題 1 $1 \in S \subset A(\Gamma)$ とする。T を $\|T\| = 1$ を満たす S についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素とする。T_1 を $\|T_1\| \leq 1$ を満たす $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素とする。$h \in S$ に関して $Th = T_1 h$ ならば $T = T_1$ である。

関数$h \in A(\Gamma)$, $h \neq 0$ に対して　$(h/\bar{h})(\zeta) = h(\zeta)/\overline{h(\zeta)}$ がほとんどすべての点$\zeta \in \Gamma$に対して定義できる。$h/\bar{h}$ が Γ 上連続的に拡張される時$h/\bar{h}$ は拡張された関数とみなす。次の定理が成り立つ。

定理3 ([2]) T を $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ を満たすものとする。$Tz = h$, $Tz^2 = g$ とおく。このとき次が成り立つ。

i) $h \neq 0$ ならばT が (#) を満たす $\{1, z, z^2\}$ についての BKW-作用素 であるための必要十分条件は $h/\bar{h}$ が finite Blaschke product かつ $h/\bar{h} = 2h^2 - g$ である。この場合、$\varphi = h + \sqrt{g - h^2}$ で $\psi = h - \sqrt{g - h^2}$ である。ここで $\sqrt{g - h^2}$ は$g - h^2$ の root functions の一つである。

ii) $h = 0$ ならばT が (#) を満たす $\{1, z, z^2\}$ についての BKW-作用素 であるための必要十分条件は g が finite Blaschke product である。この場合、$\varphi = \sqrt{g}$ で $\psi = -\sqrt{g}$ である。

証明　まず $h, g \in A, \|h\|_\infty \leq 1$ かつ $\|g\|_\infty \leq 1$ であることに注意する。T が (#) の形を持つと仮定する。この時 $\varphi + \psi = 2h$ かつ $\varphi^2 + \psi^2 = 2g$ が成り立つ。$(\varphi + \psi)^2 = \varphi^2 + \psi^2 + 2\varphi\psi$ だから

$$2h^2 - g = \varphi\psi \tag{1}$$

である。$h, g \in A$ だから $\varphi\psi \in A$ である。Γ 上で $|\varphi\psi| = 1$ だから $\varphi\psi$ は finite Blaschke product である。$h \neq 0$ である時、(1) より $h/\bar{h} = (\varphi + \psi)/(\bar{\varphi} + \bar{\psi}) = \varphi\psi = 2h^2 - g$。$h = 0$ の時、$g = -\varphi\psi$ かつ g は finite Blaschke product である。

次に逆を示す。$h \neq 0$ と仮定する。

$$b = h/\bar{h} = 2h^2 - g \tag{2}$$

とおく。この時、仮定より b は finite Blaschke product である。

$$b = h^2/|h|^2 \tag{3}$$

だから、(2) より

$$g - h^2 = h^2 - b = (-b)(1 - |h|^2) \tag{4}$$

が成り立つ。一つの root function $\sqrt{g - h^2}$ をとり

$$\varphi = h + \sqrt{g - h^2}, \quad \text{かつ} \quad \psi = h - \sqrt{g - h^2} \tag{5}$$

とおく。この時

$$(\varphi + \psi)/2 = h \in A(\Gamma) \quad \text{かつ} \quad \varphi\psi = 2h^2 - g \in A(\Gamma) \tag{6}$$

が成り立つ。(4) より

$$|h|^2 + \left|\sqrt{g - h^2}\right|^2 = 1 \tag{7}$$

$\zeta \in \Gamma$ とする。もし $h(\zeta) = 0$ ならば、(7) より $|(\sqrt{g - h^2})(\zeta)| = 1$、したがって $|\varphi(\zeta)| = |\psi(\zeta)| = 1$。もし $h(\zeta) \neq 0$ ならば (3),(4) より

$$(\sqrt{g - h^2})(\zeta) = ih(\zeta)\sqrt{1 - |h(\zeta)|^2}/|h(\zeta)|$$

$$(\sqrt{g-h^2})(\zeta) = -ih(\zeta)\sqrt{1-|h(\zeta)|^2}/|h(\zeta)|$$

が成り立つ。したがって、(5) より

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta)| = \left|h(\zeta) + \left(\sqrt{g-h^2}\right)(\zeta)\right| &= \left|h(\zeta) \pm \frac{ih(\zeta)}{|h(\zeta)|}\sqrt{1-|h(\zeta)|^2}\right| \\ &= \left||h(\zeta)| \pm i\sqrt{1-|h(\zeta)|^2}\right| = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。同様にしてすべての $\zeta \in \Gamma$ に対して $|\psi(\zeta)| = 1$ が成り立つ。ゆえに

$$\Gamma \text{上で} \ |\varphi| = |\psi| = 1。 \tag{8}$$

$f \in A(\Gamma)$ に対して

$$T_0 f = \frac{1}{2}(C_\varphi + C_\psi)f \tag{9}$$

とおく。この時 (5) より

$$T_0 1 = 1,\ T_0 z = h \ \text{かつ} \ T_0 z^2 = g \tag{10}$$

が成り立つ。$\varphi^n + \psi^n = (\varphi^{n-1} + \psi^{n-1})(\varphi + \psi) - \varphi\psi(\varphi^{n-2} + \psi^{n-2})$ だから (6) と帰納法により

$$\text{すべての非負な整数} \ n \ \text{に対して} \ T_0 z^n \in A(\Gamma) \tag{11}$$

が成り立つ。$f \in A$ とする。この時、解析的な多項式の列 $\{p_k\}_k$ で $\|f - p_k\|_\infty \to 0\ (k \to \infty)$ が存在する。この時 (8) と (9) により $\|T_0 f - T_0 p_k\|_\infty \to 0\ (k \to \infty)$。(11) より $T_0 p_k \in A(\Gamma)$。

したがって $f \in A(\Gamma)$ に対して $T_0 f \in A(\Gamma)$ が成り立つ。結果として T_0 は $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素で $\|T_0\| = 1$ かつ $T_0 1 = 1$ を満たす。定理 1 より T_0 は $\{1, z, z^2\}$ についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素である。(10) より $T_0 z^j = T z^j \ (j = 0, 1, 2)$ が成り立つ。ゆえに補題 1 より $T = T_0$ である。

$h = 0$ かつ g は finite Blaschke product であると仮定する。$T_1 f = \frac{1}{2}(C_{\sqrt{g}} + C_{-\sqrt{g}})f \ (f \in A)$ とおく。この時 $n \geq 1$ に対して $T_1 1 = 1,\ T_1 z^{2n-1} = 0$ かつ $T_1 z^{2n} = g^n$ が成り立つ。上と同様にして $T_1 = T$ かつ T が $\{1, z, z^2\}$ についての BKW-作用素であることを証明できる。　(証明終わり)。

4. 問題

T を test functions $S_3 = \{1, z, z^2, z^3\}$ についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ を満たすものとする。定理 1 より T は次のように表せる。

$$(Tf)(\zeta) = a(\zeta)(C_\varphi f)(\zeta) + b(\zeta)(C_\psi f)(\zeta) + c(\zeta)(C_\phi f)(\zeta) \quad (\zeta \in \Gamma,\ f \in A(\Gamma)),$$

ここで

$$|\varphi(\zeta)| = |\psi(\zeta)| = |\phi(\zeta)| = 1,\ a(\zeta) + b(\zeta) + c(\zeta) = 1,\ a(\zeta),\ b(\zeta),\ c(\zeta) \geq 0 \quad (\zeta \in \Gamma)。$$

特に次の形を持つ BKW-作用素を考える。

$(\star)$ $T = (C_\varphi + C_\psi + C_\phi)/3$, Γ 上で $|\varphi| = 1$ かつ $|\psi| = 1$ かつ $|\phi| = 1$。

この場合、$T1 = 1$ かつ $\|T\| = 1$。

問題 T を $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ を満たすものとする。この時 T が $(\star)$ を満たす $\{1, z, z^2, z^3\}$ についての BKW-作用素であるための必要十分条件は何か。

REFERENCES

[1] Hoffman K., *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[2] Hirasawa G., Izuchi K. and Kasuga K., *Korovkin type approximation theorems on the disk algebra.* Hokkaido. Math. J. **29** (2000), 103-117.

[3] Izuchi K., Takagi H. and Watanabe S., *Sequential BKW-operators and function algebras.* J. Approx. Theory **85** (1996), 185-200.

[4] Takahasi S.-E., *Bohman-Korovkin-Wulbert operators on normed spaces.* J. Approx. Theory **72** (1993), 174-184.